Государственное учреждение образования
«Минский областной институт развития образования»

Серия «В помощь учителю»

ЗАДАНИЯ И РЕШЕНИЯ ВТОРОГО ЭТАПА РЕСПУБЛИКАНСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО УЧЕБНОМУ ПРЕДМЕТУ «МАТЕМАТИКА»

Минск 2022

УДК 51(07)
ББК 22.1я72
З15

Серия основана в 2012 году

Рекомендовано научно-методическим советом
государственного учреждения образования
«Минский областной институт развития образования»

С о с т а в и т е л и:
И. А. Бодягин, заведующий кафедрой математического моделирования и анализа данных факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;
Л. П. Радкевич, методист учебно-методического отдела естественно-математических и технологических дисциплин ГУО «Минский областной институт развития образования»

Р е ц е н з е н т ы:
Л. И. Лавринович, доцент кафедры методов оптимального управления факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;
О. А. Коваленко, старший преподаватель кафедры педагогики и предметных методик ГУО «Минский областной институт развития образования»

З15 **Задания** и решения второго этапа республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика» / сост. : И. А. Бодягин, Л. П. Радкевич ; ГУО «Минск. обл. ин-т развития образования». – Минск : Мин. обл. ин-т развития образования, 2022. – 72 с.
ISBN 978-985-7225-48-4.

В пособии представлены олимпиадные задания и их решения, которые были использованы при проведении второго этапа республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика в 2014/2015–2022/2023 учебных годах.

Рекомендовано методистам, преподавателям системы дополнительного образования, учителям математики и учащимся учреждений общего среднего образования для подготовки к олимпиадам, проведения факультативных занятий.

УДК 51(07)
ББК 22.1я72

ISBN 978-985-7225-48-4

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Успешность работы с высокомотивированными и одаренными детьми во многом зависит от того, как организована деятельность с этой категорией учащихся. Чаще всего учащиеся могут продемонстрировать способности в области математики, раскрыть потенциал своих возможностей, участвуя в таком виде интеллектуальных соревнований, как олимпиады.

Согласно Инструкции о порядке проведения республиканской олимпиады по учебным предметам ежегодно в учреждениях образования, реализующих образовательную программу базового образования, образовательную программу среднего образования, образовательную программу специального образования на уровне общего среднего образования, образовательную программу профессионально-технического образования, обеспечивающую получение квалификации рабочего (служащего) и общего среднего образования, образовательную программу профессионально-технического образования, обеспечивающую получение квалификации рабочего (служащего) и общего среднего образования с изучением отдельных учебных предметов на повышенном уровне, образовательные программы среднего специального образования (далее – учреждения образования) проводится республиканская олимпиада по учебному предмету «Математика».

Основными задачами республиканской олимпиады являются:

повышение интереса учащихся к изучаемым учебным предметам, развитие их творческих способностей, углубление теоретических знаний и практических умений, содействие самореализации личности;

подготовка одаренных учащихся для продолжения обучения в учреждениях высшего образования;

стимулирование деятельности педагогических работников по развитию способностей одаренных учащихся;

активизация работы факультативных занятий, объединений по интересам;

привлечение научных работников, педагогических работников, аспирантов, студентов к работе по оказанию помощи в пропаганде знаний и организации работы с учащимися;

пропаганда научных знаний и развитие интереса учащихся к научной деятельности;

подготовка учащихся к участию в международных олимпиадах.

Республиканская олимпиада проводится в каждом учебном году в четыре этапа:

первый этап – учреждения образования;

второй этап – районный (городской), а также в учреждениях общего среднего образования областного подчинения (далее – учреждения областного подчинения);

третий этап – областной (Минский городской), а также в учреждениях высшего образования, реализующих образовательную программу среднего образования, в государственном учреждении образования «Лицей Белорусского государственного университета» (далее – учреждения республиканского подчинения);

четвертый этап – заключительный.

На каждом этапе республиканской олимпиады учащиеся выполняют задания различной сложности.

Выполнение олимпиадных заданий способствует освоению учащимися нестандартных приемов решения задач, развитию креативности мышления. Если учащийся в системе готовится к участию в республиканской олимпиаде, он осваивает не только большой объем материала из разделов олимпиадной тематики, но и систематизирует знания школьной программы. А это в свою очередь помогает при сдаче централизованного тестирования по учебному предмету «Математика».

Представленные в пособии олимпиадные задания были апробированы при организации второго этапа республиканской олимпиады по учебному предмету «Математика» в Минской области в 2014/2015–2022/2023 учебных годах.

Предложенные задания могут быть использованы методистами, преподавателями системы дополнительного образования, учителями математики и учащимися учреждений общего среднего образования для подготовки к олимпиадам, а также для проведения факультативных занятий.

2014/2015 УЧЕБНЫЙ ГОД

ЗАДАНИЯ

8 класс

1. Определите, какую цифру обозначает каждая буква в равенстве $(УХ)^{У}$ = БУХ, если одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным – разные.

2. На каждой из клеток размером: а) 2014×2015; б) 2015×2015 находится фишка. Восьмиклассник Ваня хочет передвинуть каждую фишку на соседнюю по стороне клетку так, чтобы в каждой из клеток снова оказалось по одной фишке. Сможет ли Ваня это сделать?

3. Докажите, что если сумма двух натуральных чисел равна 2014, то их произведение не делится на 2014.

4. Доказать неравенство: $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}<\frac{2}{5}$.

5. В треугольнике *ABC* точка *M* – середина стороны *AC*, точка *K* лежит на стороне *BC*. Отрезок *AK* пересекает *BM* в точке *O*. Оказалось, что *AM* = *OM*. Могло ли так случиться, что *OC* = *CK*?

9 класс

1. Можно ли замостить (без наложений) доску 10×10 прямоугольниками 1×4?

2. Последовательность задается следующим образом: $a_1=1$, $a_{n+1}=7n+a_n$, $n\in\mathrm{N}$. Так, первые элементы последовательности равны 1, 8, 22, 43,… Известно, что число 35 351 является членом последовательности. Найдите его номер.

3. Натуральные числа *p* и *d* таковы, что числа *p*, *p* + *d*, *p* + 2*d* являются простыми. Найти все возможные значения числа *p*, если *d* не делится на 6.

4. В треугольнике *ABC* точка *M* – середина стороны *AC*, точка *K* лежит на стороне *BC*. Отрезок *AK* пересекает *BM* в точке *O*. Оказалось, что *BK : BO*=*a*, где *a* – некоторое известное действительное число. Выразите через *a* отношение *KC* к *OM*.

5. Доказать неравенство: $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015}<\frac{1}{2}-\frac{1}{1014}$.

10 класс

1. Трое играют в настольный теннис, причем игрок, проигравший партию, уступает место игроку, не участвовавшему в ней. В итоге оказалось, что первый игрок сыграл 10 партий, а второй – 21. Сколько партий сыграл третий игрок?

2. Доказать, что произведение трех последовательных натуральных чисел, среднее из которых является кубом натурального числа, делится на 504.

3. На клетчатой плоскости произвольным образом отмечены 2014 клеток. Докажите, что среди них всегда можно выбрать не менее 500 клеток, попарно не соприкасающихся друг с другом (соприкасающимися считаются клетки, имеющие хотя бы одну общую вершину).

4. Доказать неравенство $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015}<\frac{2}{5}$.

5. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$, диагональ BD которого является диаметром описанной окружности. Пусть K и L – основания перпендикуляров, опущенных из вершин B и D на диагональ AC соответственно. Найдите AK, если $CL = 1$.

11 класс

1. Трое играют в настольный теннис, причем игрок, проигравший партию, уступает место игроку, не участвовавшему в ней. В итоге оказалось, что первый игрок сыграл 10 партий, второй – 15, третий – 17. Кто проиграл во второй партии?

2. Найти четырехзначное число, у которого первые цифры также, как и две последние цифры, одинаковы, а само число является квадратом некоторого целого числа.

3. Петя и Вася играют в «морской бой». На клетчатой доске 10×10 Вася размещает прямоугольник-«корабль» 1×4 или 4×1. Каждым своим ходом-«выстрелом» Петя, не видя положения прямоугольника, указывает на какую-либо клетку поля. Если указанная клетка содержится в прямоугольнике-«корабле», Петя выиграл, иначе он повторяет свой ход, снова выбирая клетку. За какое наименьшее количество ходов-«выстрелов» Петя сможет с гарантией подбить прямоугольник-«корабль»?

4. Доказать неравенство $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015}<\frac{3}{8}$.

5. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 2.

РЕШЕНИЯ

8 класс

1. Ответ: 252 = 625.

Рассмотрим равенство $(\text{УХ})^{\text{У}}$=БУХ. Так как $(30)^3 = 27000$, то У = 1 или У = 2. Если У = 1, то получим, что УХ = БУХ, откуда Б = 0, но это первая цифра трехзначного числа, которая не может равняться 0. Значит У = 2, откуда $(\text{УХ})^2$=БУХ. Т.е. квадрат натурального числа заканчивается на туже цифру, что и само число. Следовательно, буква Х равна одной из следующих цифр: 0, 1, 5, или 6. Перебирая все 4 варианта, получаем: $20^2 = 400$ (не подходит), $21^2 = 441$ (не подходит), $25^2 = 625$ (подходит), $26^2 = 676$ (не подходит). Таким образом, имеем Х = 5 и Б = 6: $(25)^2 = 625$.

2. Ответ: а) сможет; б) не сможет.

а) Доска 2014×2015 легко разбивается на прямоугольники 1×2 или 2×1. При передвижении фишки, стоящие в одном прямоугольнике, Ваня просто поменяет местами.

б) Рассмотрим шахматную раскраску доски 2015×2015. Ясно, что черных и белых клеток не поровну (пусть черных на 1 больше). Если перемещение фишек, описанное в условии задачи, возможно, то «белые» фишки должны занять все черные клетки, однако «белых» фишек меньше, чем черных клеток, поэтому такое перемещение невозможно.

3. Пусть $a+b=2014$ и предположим, что $ab \vdots 2014$. Известно, что число 2014 представимо в виде $2014 = 2\cdot 19\cdot 53$. Т.к. произведение $ab \vdots 2014$, то $ab \vdots 2$ и, следовательно, a или b делится на 2. Не нарушая общности, пусть $a \vdots 2$. Но тогда из равенства $a+b=2014$ следует, что и число $b \vdots 2$. Аналогично показывается, что и a, и b делятся на 19 и 53. Таким образом, мы показали, что a и b натуральные числа, каждое из них делится на 2014. Но тогда $a \ge 2014$ и $b \ge 2014$, что противоречит условию $a+b=2014$. Мы получили противоречие с предположением, что $ab \vdots 2014$.

4. Заметим, что в сумме записаны слагаемые вида $\dfrac{1}{k(k+1)}$, которые можно представить в виде $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$. Подставив такие разности в имеющуюся сумму, получим $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{42}+\dfrac{1}{56}+\dfrac{1}{72}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{9}=\dfrac{7}{18}$. Этот же результат можно получить, непосредственно вычислив указанную сумму.

Легко проверить, что $\dfrac{7}{18}<\dfrac{2}{5}$.

5. Ответ: не могло.

Треугольники *AMO* и *CMO* – равнобедренные (*AM* = *OM* = *CM*), поэтому $\angle MAO = \angle MOA = \alpha$ и $\angle MCO = \angle MOC = \beta$. В треугольнике *AOC* сумма углов равна $2\alpha+2\beta=180^\circ$, откуда $\angle AOC = \alpha+\beta = 90^\circ$ и $\angle COK = 180^\circ - \angle AOC = 90^\circ$. Следовательно, треугольник *COK* – прямоугольный, в котором гипотенуза *CK* больше катета *CO*.

9 класс

1. Ответ: нельзя.

Рассмотрим диагональную раскраску в четыре цвета доски 10×10 (рис.1). Ясно, что каждый прямоугольник 1×4 накрывает клетки четырех различных цветов. Если указанное замощение возможно, то клеток различных цветов должно быть поровну, однако непосредственным подсчетом можно убедиться, что клеток цвета 1 в таблице ровно 26, цвета 2 – 25, цвета 3 – 24, цвета – 25, то есть не поровну, поэтому требуемое замощение невозможно.

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1

2. Ответ: 101.

Найдем выражение n-го члена последовательности $a_{n+1} = 7n + a_n = 7n + 7(n-1) + a_{n-1} = 7(n + n - 1 + ... + 1) + 1 = \frac{7n(n+1)}{2} + 1, n \geq 1,$ откуда $a_n = \frac{7n(n-1)}{2} + 1, n \geq 1.$ Чтобы найти номер члена последовательности, равного 35 351, решим в натуральных числах уравнение $35351 = \frac{7n(n-1)}{2} + 1 \Leftrightarrow 70700 = 7n(n-1) \Leftrightarrow 10100 = n(n-1) \Leftrightarrow n^2 - n - 10100 = 0.$ Откуда получим два решения $n_1 = 101, n_2 = -100$, из которых подходит только n = 101. Таким образом, число 35 351 имеет номер 101 в указанной последовательности.

3. Ответ: $p = 3$.

Пусть число d нечетное, тогда числа $p + d$ и $p + 2d$ разной четности и, следовательно, одно из них делится на 2. Поскольку единственное четное простое число – это число 2, то $p + d$ или $p + 2d$ должно равняться двум, чего быть не может, т.к. $p \geq 2$ (2 – наименьшее простое число) и $d \geq 1$ (d – натуральное число). Значит, d нечетно. Поскольку d не делится на 6 и четное, то оно представимо в виде $d = 6k + 2$ или $d = 6k + 4$, где k – целое неотрицательное число. Пусть $d = 6k + 2$, тогда числа p, $p + d$, $p + 2d$ равны соответственно p, $p + 6k + 2 = 3 \cdot 2k + p + 2$, $p + 12k + 4 = 3(4k+1) + p + 1$, которые дают различные остатки при делении на 3. Получаем, что одно из этих чисел делится на три, а значит и равно трем. Но из этих трех чисел только p может равняться трем, т.к. в рассматриваемом случае $p \geq 2$ и $d \geq 2$. Таким образом, при $d = 6k + 2$ получаем единственный ответ $p = 3$. Примером исходной тройки простых чисел может служить тройка 3, 5, 7. Пусть $d = 6k + 4$, тогда числа p, $p + d$, $p + 2d$ равны соответственно p, $p + 6k + 4 = 3(2k+1) + p + 1$, $p + 12k + 8 = 3(4k+2) + p + 2$, которые дают различные остатки при делении на 3. Получаем, что одно из этих чисел делится на три, а значит и равно трем. Но из этих трех чисел только p может равняться трем, т.к. в рассматриваемом случае $p \geq 2$ и $d \geq 4$. Таким образом, при $d = 6k + 4$ также получаем единственный ответ $p = 3$. Примером исходной тройки простых чисел может служить тройка 3, 7, 11.

4. Ответ: 2а.

Через точку M проведем прямую, параллельную AK и пересекающую сторону BC в точке T. В силу параллельности AK и MT имеем отношение $BO:OM = BK:KT$ или $BO:BK = OM:KT$, откуда $KT:OM = a$. В силу той же параллельности AK и MT имеем $KT:TC = AM:MC = 1$, то есть $KT = TC$. Поэтому искомое отношение $\frac{KC}{OM} = \frac{KT}{OM} + \frac{TC}{OM} = a + a = 2a.$

5. Заметим, что $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} < \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$, для $m < k$. Это следует из неравенства $\frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{m(m+1)}$, которое очевидно выполняется при $m < k$. Тогда разность $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ можно ограничить сверху разностью $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, разность $\frac{1}{6} - \frac{1}{7}$ – разностью $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ и так далее, наконец, разность $\frac{1}{2014} - \frac{1}{2015} < \frac{1}{1013} - \frac{1}{1014}$, откуда

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1013} - \frac{1}{1014} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1014}.$$

10 класс

1. Ответ: 11 партий.

Ясно, что любой игрок принимает участие, по крайней мере, в одной из любых двух сыгранных подряд партий. Так как первый игрок сыграл 10 партий, то всего было сыграно не более 21 партии, а значит, их было сыграно ровно 21, откуда следует, что третий игрок сыграл 11 партий (а второй игрок все время стоял за столом).

2. Докажем, что если a – натуральное число, большее 1, то число $N = (a^3 - 1)a^3(a^3 + 1)$ делится на $504 = 7 \cdot 8 \cdot 9$. Поскольку любые два из трех чисел 7, 8 и 9 взаимно простые, то задача сводится к доказательству делимости N на каждое из них в отдельности.

Число a можно представить в виде $a = 7k + r$, где k – натуральное число, а r – одно из чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Тогда $a^3 = 7^3k^3 + 3 \cdot 7^2k^2r + 3 \cdot 7kr^2 + r^3$. Это означает, что при делении на 7 число a^3 дает такой остаток, как и r^3. Но r^3 – одно из чисел 0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, поэтому остаток от деления числа a^3 на 7 равен одному из чисел 0, 1, 6. Отсюда следует, что одно из чисел a^3, $a^3 - 1$, $a^3 + 1$ заведомо делится на 7.

Для доказательства делимости на 8 достаточно заметить, что когда число a четно, то a^3 делится на 8, а когда число a нечетно, то $a^3 - 1$ и $a^3 + 1$ – два последовательных четных числа, в силу чего одно из них делится на 4, а их произведение – на 8.

Как и при рассмотрении делимости куба натурального числа на 7 можно показать, что a^3 при делении на 9 может давать лишь остатки 0, 1 и 8, откуда одно из чисел a^3, $a^3 - 1$, $a^3 + 1$ заведомо делится на 9.

3. Раскрасим плоскость в четыре цвета так, чтобы клетки одного цвета не соприкасались. Всего отмеченных клеток 2014, следовательно, по принципу Дирихле, найдется цвет, среди клеток которого отмечено не менее 2014 / 4 > 500.

1	2	1	2	1
3	4	3	4	3
1	2	1	2	1
3	4	3	4	3
1	2	1	2	1

4. Заметим, что $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}<\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}$, для $m<k$. Это следует из неравенства $\frac{1}{k(k+1)}<\frac{1}{m(m+1)}$, которое очевидно выполняется при $m<k$. Тогда разность $\frac{1}{8}-\frac{1}{9}$ можно ограничить сверху разностью $\frac{1}{7}-\frac{1}{8}$, разность $\frac{1}{10}-\frac{1}{11}$ – разностью $\frac{1}{8}-\frac{1}{9}$ и т. д., наконец, разность $\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015}<\frac{1}{1015}-\frac{1}{1016}$, откуда

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015}<\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+...+\frac{1}{1015}-\frac{1}{1016}=$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{20}+\frac{1}{6}-\frac{1}{1016}<\frac{10}{60}+\frac{3}{60}+\frac{10}{60}=\frac{23}{60}<\frac{24}{60}=\frac{2}{5}.$$

5. Ответ: 1.

$\angle BAC=\angle BDC$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу, $\angle AKB=\angle BCD=90^\circ$, как опирающиеся на диаметр, поэтому треугольники *ABK* и *BCD* подобны по двум углам. Из подобия следует, что $\frac{AK}{CD}=\frac{AB}{BD}$, откуда $AK=\frac{AB\cdot CD}{BD}$. Аналогично из подобия треугольников *CLD* и *ABD* следует, что $\frac{LC}{AB}=\frac{CD}{BD}$, откуда $LC=\frac{CD\cdot AB}{BD}$. Сравнивая полученные равенства для *AK* и *LC*, убеждаемся, что $AK = LC = 1$.

11 класс

1. Ответ: во второй партии проиграл первый игрок.

Заметим, что всего было сыграно $\frac{1}{2}(10+15+17)=21$ партия. Ясно, что в одной из любых двух последовательных партий играл первый игрок. Поскольку он всего сыграл в 10 партиях из 21, то он обязательно играл во всех партиях с четными номерами и только в них. Значит, он и проиграл во второй партии.

2. Ответ: 7744.

Пусть x – число, которое требуется найти. Тогда $x=1000a+100a+10b+b$, где a и b – целые числа, удовлетворяющие неравенствам $0<a\le 9$, $0\le b\le 9$. Число x делится на 11, т. к. $x=1100a+11b=11(100a+b)$.

По условию задачи x – квадрат целого числа. Следовательно, если число x делится на 11, то оно делится и на 11^2, поэтому число $100a+b=99a+(a+b)$ делится на 11. Но тогда $a+b$ делится на 11, а поскольку $0<a+b\le 18$, то $a+b=11$. Таким образом, $x=11^2(9a+1)$.

Из этого разложения видно, что $9a+1$ – квадрат натурального числа m: $9a+1=m^2$. Т.к. $9a+1\le 82$, то $m\le 9$. Из равенства $9a+1=m^2$ следует, что $9a=(m-1)(m+1)$. Из этого равенства следует, что произведение $(m-1)(m+1)$ делится на 9, а поскольку на 3 делится не более чем одно из чисел $m-1$, $m+1$, то одно из них делится и на 9.

Учитывая, что натуральное число m меньше 10, получаем $m+1=9$, откуда $m=8$. Итак, $a=7$, $b=4$ и искомое число равно $7744=88^2$.

3. Ответ: 24 выстрела.

Из рисунка 3 следует, что ходов-«выстрелов» должно быть не менее 24 (по одному на каждый обведенный жирным прямоугольник-«корабль»). Рисунок 4 показывает, как должен «стрелять» Петя, чтобы гарантированно подбить «корабль» за 24 «выстрела».

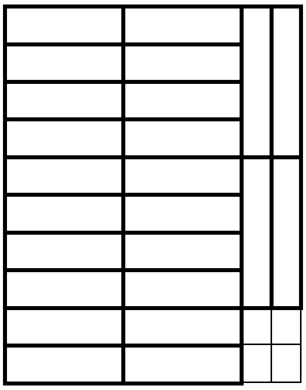


Рис. 3

		x				x			
			x				x		
x				x				x	
	x				x				x
		x				x			
			x				x		
x				x				x	
	x				x				x
		x				x			
			x				x		

Рис. 4

4. Заметим, что $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}<\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}$, для $m<k$. Это следует из неравенства $\frac{1}{k(k+1)}<\frac{1}{m(m+1)}$, которое очевидно выполняется при $m<k$. Тогда разность $\frac{1}{10}-\frac{1}{11}$ можно ограничить сверху разностью $\frac{1}{9}-\frac{1}{10}$, разность $\frac{1}{12}-\frac{1}{13}$ – разностью $\frac{1}{10}-\frac{1}{11}$ и т. д., наконец, разность $\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015}<\frac{1}{1016}-\frac{1}{1017}$, откуда

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015}<\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{1016}-\frac{1}{1017}=$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{20}+\frac{1}{42}+\frac{1}{8}-\frac{1}{1017}<\frac{140}{840}+\frac{42}{840}+\frac{20}{840}+\frac{105}{840}=\frac{307}{840}<\frac{3}{8}$$, т.к. 307*8 = 2456 < 2520.

5. Ответ: 1.

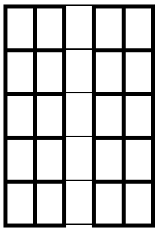
Четырехугольник AC_1A_1C – вписанный, так как $\angle AC_1C=\angle AA_1C=90^\circ$. Следовательно, $\angle C_1AC=180^\circ-\angle C_1A_1C=180^\circ-(180^\circ-\angle C_1A_1B)=\angle C_1A_1B$, поэтому треугольник ABC подобен треугольнику A_1BC_1 по двум углам. Из подобия имеем $\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{BC_1}=\frac{1}{\cos\angle B}$ (последнее равенство вытекает из прямоугольного треугольника CC_1B). Пусть H – точка пересечения высот треугольника ABC.

Так как четырехугольники AC_1HB_1 и CA_1HB_1 – вписанные (у обоих по два противолежащих прямых угла), то $\angle HB_1C_1=\angle HAC_1=90^\circ-\angle B$ и $\angle HB_1A_1=\angle HCA_1=90^\circ-\angle B$, поэтому $\angle C_1B_1A_1=180-2\angle B$. По теореме синусов для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ имеем

$$\frac{2\mathrm{R(ABC)}}{2\mathrm{R}(\mathrm{A_1B_1C_1})}=\frac{\mathrm{AC}}{\sin\angle\mathrm{B}}:\frac{\mathrm{A_1C_1}}{\sin\angle\mathrm{A_1B_1C_1}}=\frac{AC}{\sin\angle\mathrm{B}}\cdot\frac{\sin(180^\circ-2\angle\mathrm{B})}{\mathrm{AC}\cos\angle\mathrm{B}}=\frac{\sin(2\angle\mathrm{B})}{\cos\angle\mathrm{B}}=\frac{2\sin\angle\mathrm{B}\cos\angle\mathrm{B}}{\cos\angle\mathrm{B}}=2,$$

поэтому $\mathrm{R}_{\mathrm{A_1B_1C_1}}=1$.

Пусть можно провести не меньше 17 диагоналей. Рассмотрим один из прямоугольников 5×2, показанных ниже.



Поскольку на вертикальной линии, проходящей через середину прямоугольника, находится 6 вершин клеточек, то в таком прямоугольнике мы можем провести не более 6 диагоналей, удовлетворяющих условию. Тогда в двух отмеченных прямоугольниках 5×2 можно провести не более 12 диагоналей. По предположению всего проведенных диагоналей не меньше 17, значит в третьем столбце во всех клетках должны быть проведены диагонали. Заметим, что диагонали, проведенные в соседних (имеющих общую сторону) клетках, обязательно параллельны. А значит во всех клетках третьего столбца диагонали должны быть параллельны. Повторяя аналогичные рассуждения для горизонтальных прямоугольников 2×5, мы получим, что в третьей строке во всех клетках должны быть проведены диагонали, и они все должны быть параллельны. Возможные ситуации представлены на рисунке внизу. Как видно из рисунков, в каждом из случаев есть диагонали, имеющие общую вершину, чего быть не должно. Противоречие.